ثالثاً: بالجمع بين أولاً وثانياً نجد أن نتيجة التكامل لا تتغير إذا وضعنا $(ax+b)$ بدلاً من x إلا بالقسمة على a (أى معامل x). أى أن:

$$\int \acute{f}\,(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b) + c.$$

فمثلاً:

(1) $$\int (2x+3)^7 dx = \frac{1}{16}(2x+3)^8 + c.$$

(2) $$\int e^{4-3x}\, dx = \frac{-1}{3} e^{4-3x} + c.$$

(3) $$\int \frac{dx}{1+(4x+3)^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}(4x+3) + c$$

(4) $$\int \frac{dx}{9+25x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\frac{9}{25}+x^2} = \frac{1}{25}\cdot\frac{5}{3}\tan^{-1}\frac{5x}{3} + c.$$

(5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{5} + c.$$

(6) $$\int \frac{dx}{49-(2x+3)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\tanh^{-1}\frac{2x+3}{7} + c.$$

رابعاً: يمكن أن نبرهن على أن

$$\int (f(x))^n \acute{f}(x)dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c \qquad , n \neq -1$$

وذلك إذا أخذنا $Z = f(x)$ فإن $dz = \acute{f}(x)dx$ ومن ثم فإن

$$\int (f(x))^n \acute{f}(x)dx = \int Z^n dz = \frac{Z^{n+1}}{n+1} + c \qquad , n \neq -1$$

$$=\frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}+c$$

<u>أمثـــــــــــــلة:</u>

(1) $$\int (x^2+3\cos x)^2(2x-3\sin x)dx=\frac{(x^2+3\cos x)^3}{3}+c$$

(2) $$\int (2\tan x+3)^5 sec^2 x\, dx=\frac{1}{2}\int (2\tan x+3)^5(2\, sec^2 x)\, dx$$

$$=\frac{1}{12}(2\tan x+3)^6+c$$

(3) $$\int sin^{\,3} x\, dx=\int sin^2 x\sin x\ dx=\int (1-\ cos^2 x)\sin x\ dx$$

$$=\int \sin x\ dx-\int cos^2 x\sin x\ dx=-\cos x+\frac{cos^3 x}{3}+c$$

<u>خامسًا</u>: فى جميع التكاملات الأساسية إذا حل محل x دالة فى x ولتكن $f(x)$ وكانت الدالة المكاملة تحتوى على $\acute{f}(x)$ كعامل. فإنه يمكننا إستخدام النتائج السابقة مع التعويض بالدالة $f(x)$ بدلاً من x.

فإذا وضعنا فى رابعًا$n=-1$ فإنه يمكن البرهنة على أن

$$\int \frac{\acute{f}(x)}{f(x)}\, dx\ =\log|f(x)|+c.$$

والبرهان يتضح من وضع $Z=f(x)$ وعليه فإن $dz=\acute{f}(x)dx$

وبالتالي فإن

$$\int \frac{\acute{f}(x)}{f(x)}\, dx\ =\int \frac{dZ}{Z}=\log|Z|+c=\log|f(x)|+c.$$

ومن هنا يمكن استنتاج بعض التكاملات الأساسية:

$$\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + c.$$

…………………………………………………………………

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log|\sin x| + c$$

…………………………………………………………………

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \cdot \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} \; dx$$

$$= \int \frac{sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \log|\sec x + \tan x| + c.$$

$$\int cosec\; x \, dx = \int cosec\; x \cdot \frac{(cosec\; x + \cot x)}{(cosec\; x + \cot x)} dx$$

$$= \int \frac{cosec^2 x + \; cosec\; x + \cot x}{cosec\; x + \cot x} \; dx$$

$$= -\log|cosec\; x + \cot x| + c.$$

…………………………………………………………………

$$\int \tanh x \, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \log\cosh x + c.$$

……………………………………………………………………

$$\int \coth x \, dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx = \log\sinh x + c.$$

<u>أمثلة متنوعة:</u>

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x} dx = \int \frac{d(\sinh x)}{1+\sinh^2 x} = \tan^{-1}(\sinh x) + c$$

……………………………………………………………………

$$\int \frac{1-2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$
$$= \tan^{-1} x - \log(1+x^2) + c.$$

……………………………………………………………………

$$\int_1^2 \frac{1+\log x}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \log x|_1^2 + \int_1^2 \log x \, d(\log x)$$

$$= (\log 2 - \log 1) + \left.\frac{(\log x)^2}{2}\right|_1^2 = \log 2 + \frac{1}{2}(\log 2)^2.$$

<u>سادسًا:</u> يمكن البرهنة على أن

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

وذلك بوضع $Z = f(x)$.

<u>أمثلة:</u>

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$
$$= \sqrt{x^2+1} + 5\sinh^{-1} x + c$$

……………………………………………………………………

$$\int \frac{x^2+\cos x}{\sqrt{x^3+3\sin x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3\cos x}{\sqrt{x^3+3\sin x}}dx$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3\sin x}+c$$

سابعًا: في التكاملات التي على الصورة:

$$I = \int e^{f(x)} \acute{f}(x)dx$$

نأخذ التعويض $u = f(x)$ ومن ثم فإن $du = \acute{f}(x)dx$ وبالتالى نجد أن

$$I = \int e^{f(x)} \acute{f}(x)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{f(x)} + c.$$

مثال: أوجد التكامل $I = \int e^{\sin x} \cos x\, dx$

الحل نضع $u = \sin x$ ومنه $du = \cos x\ dx$ وبالتالى فإن

$$I = \int e^{\sin x} \cos x\ dx = \int e^u\, du = e^u + c = e^{\sin x} + c$$

مثال(٢):عين التكامل $I = \int e^{-x^3} x^2 dx$

الحل:نضع $u = x^3$ ومنه $du = 3x^2 dx$ وبالتالى فإن

$$I = \frac{1}{3}\int e^{-x^3} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int e^{-u}\, du = \frac{-1}{3}e^{-u} + c$$
$$= \frac{-1}{3}e^{-x^3} + c.$$

تكامل مربعات الدوال المثلثية ومربعات الدوال الزائدية:

$$\int \sin^2 x \ dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right] + c$$

$$\int \cos^2 x \ dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right] + c$$

$$\int \tan^2 x \ dx = \int (\sec^2 x - 1)\ dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x \ dx = \int (co\sec^2 x - 1)\ dx = -\cot x - x + c$$

$$\int \sec^2 x \ dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \ dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh^2 x \ dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2x - x\right] + c$$

$$\int \cosh^2 x \ dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x + 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2x + x\right] + c$$

$$\int \tanh^2 x \ dx = \int (1 - \operatorname{sech}^2 x)\ dx = x - \tanh x + c$$

$$\int \coth^2 x \ dx = \int (1 + \operatorname{cosech}^2 x)\ dx = x - \coth x + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \ dx = \tanh x + c$$